Analyse II pour CGC et SV : Organisation du cours

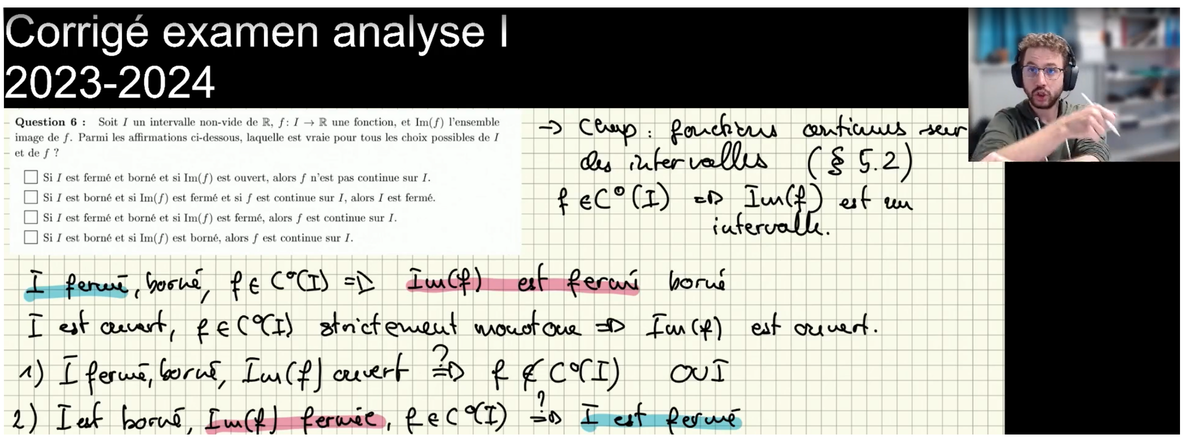
David Strütt

EPFL MATH-106(f) Analyse II / CGC, SV

17 février 2025

Enseignant : David Strütt

- Chargé de cours pour le département de maths (Analyse I SV, Analyse III CGC, GC, SIE)
- Ancien étudiant et doctorant de l'EPFL
- Donne le cours d'analyse II pour la deuxième fois



Assistant Principal : Théophile Boinnard, doctorant en analyse numérique

Plus 12 assistant · es étudiant · es.

Contenu

Deux objectifs :

- Équations différentielles ordinaires (dérivée par rapport à une seule variable).
- Généralisation de l'analyse I à $\mathbb{R}^n$.

Par rapport à Analyse I, beaucoup moins d'emphase sur les démonstrations. Plus d'emphase sur les méthodes.

Ressources

Les ressources d'apprentissages auxquelles vous avez accès :

- Les cours ex cathedra les lundis de 10h15 à 12h00 en CE 6 et les jeudis de 14h15 à 16h00 au BCH2201. Les notes de cours manuscrites seront uploadées au plus tard tous les vendredis.
- Les séries d'exercices publiées sur moodle (6 jours avant la séance correspondante, la série est publiée, le lendemain de la séance, le corrigé est publié.)
- Un polycopié (en chantier) qui couvre la matière jusqu'au chapitre 4.
- Des ressources supplémentaires sont disponibles sur moodle.
- Les séances d'exercices avec les assistant · es les jeudis de 16h15 à 18h.
- Le forum Ed Discussions surveillé par des assistant · es les mardis soirs à partir de la semaine 3.
- Un ou deux exercices à rendre dans le semestre.

Ressources

À propos du polycopié :

- N'a encore jamais été relu ; il contient certainement des typos. Si vous en trouvez, volontiers si vous pouvez me les signaler.
- Ne couvre pas encore le cours en entier. (Environ 6 semaines de cours.) Le rythme du cours sera adapté lorsqu'on arrivera au bout du polycopié.
- Downloadez/imprimez le chapitre par chapitre, il risque d'y avoir des modifications en cours de semestre.

Ressources

À propos du forum Ed-Discussion :

- Surveillé à partir de la semaine 3
- Merci d'utiliser des titres descriptifs (Série XX, Ex XX, ...)
- Maintenu pendant les révisions

Examen

L'examen aura une partie QCM, une partie VF et une partie ouverte.
Pas de formulaire, pas de calculatrice ne sont autorisées.
Comme en analyse I.

Examen Blanc

Examen blanc :

- En conditions d'examen (salle surveillée + scan + correction comme en analyse I)
- Basé sur les questions des examens des années précédentes (attention au spoil !)
- Pas de partie ouverte
- Sur inscription !
- L'énoncé et le corrigé seront disponibles sur moodle à la fin de la semaine de l'examen blanc

Questions ?

Chapitre 1 : Équations différentielles ordinaires.

§1.1. Intro & motivation.

Prédictions

Statique des ponts?

Médecine?

Transport de produit chimiques?

Météo?

Climat?

Balistique?

(très naïve) Consulter un oracle/devin.

→ Naïf...

(naïve) Test!

Problèmes

- pas toujours possible.
- Conséquences désastreuses

Utiliser des modèles pour simuler des phénomènes ou faire des prédictions dans un cadre théorique.

Modèle Des équations qui prescrivent/décrivent l'évolution d'un phénomène.

↳ Pas comment les choses sont/seront, mais comment les choses évoluent

<u>Par exemple</u> : si $x(t)$ est la position d'un objet de masse m au temps t, soumis à une

force $F(t)$

(2ème loi de Newton) $F(t) = m \cdot x''(t)$

données

dérivées de l'inconnue

si $F(t)$ = force de gravité,

$$F(x(t)) = m \cdot x''(t)$$

Objectif : développer des outils pour trouver x.

Définition 1.1 (Équation différentielle ordinaire)

Une **équation différentielle (ordinaire)** (EDO) est la donnée d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et d'une fonction $E : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}$

$$(x, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto E(x, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n)$$

Une **solution** de l'EDO est la donnée d'un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$ et d'une fonction $y \in C^n(I)$ et tq $\forall x \in I$,
$$E(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

De plus, on dit que

(i) L'EDO est d'ordre n si E est une fonction non-constante en ξ_n (i.e. E dépend de ξ_n)

(ii) L'EDO est <u>autonome</u> si E est une fonction constante en x (i.e. E ne dépend pas de x.

<u>Remarque 1-2</u> (i) Généralement on donne une EDO sous la forme $E(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ où on identifie $y^{(k)} \longleftrightarrow \xi_k$. Par exemple

$m \cdot y'' - F(y) = 0$ à la place de $E(x, \xi_0, \xi_1, \xi_2) = m \cdot \xi_2 - F(\xi_0)$

L'ordre de l'équation est le plus grand ordre parmi les dérivées qui apparaissent.
L'équation est autonome si x n'apparaît pas ailleurs que dans y :

$$m \cdot y''(x) - F(y(x)) = 0$$

tous les x sont dans des y $\longrightarrow$ équation autonome

<u>Exemples 1.3</u> : (i) $y = 0$, $G(\xi_0) = \xi_0$, n'est pas une EDO ($n = 0 \notin \mathbb{N}^*$)

(ii) $y' = 0$. En notation formelle, $E(\xi_1) = \xi_1$

EDO autonome d'ordre 1.

(iii) $\sin(y') = 0$. En notation formelle: $E(\xi_1) = \sin(\xi_1)$

EDO autonome d'ordre 1.

(iv) $\sin(x) y' - \sin(y) = 0$. En notation formelle

$$E(x, \xi_0, \xi_1) = \sin(x)\xi_1 - \sin(\xi_0)$$

EDO d'ordre 1 (pas autonome)

(v) $y''' + y'' + y' + y = \sin(x)$. En notation formelle,

$$E(x, \xi_0, \xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_3 + \xi_2 + \xi_1 + \xi_0 - \sin(x).$$

EDO d'ordre 3 pas autonome.

<u>Exemple 1.4</u> (Solution d'une EDO)

(i) $y' = 0$. Alors $\forall C \in \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = C$ est une solution de l'EDO.

En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $y'(x) = 0$.

(ii) $y' - e^x = 0$. Alors, $\forall C \in \mathbb{R}$, $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = e^x + C$ est une solution. En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = e^x$ et donc, $y'(x) - e^x = 0$.

(iii) Plus généralement, si I est un intervalle ouvert, $f \in C^0(I)$, les solutions de $y' - f(x) = 0$ sont données par <u>intégration directe</u>

$$y(x) = \int^x f(t)\,dt \; \underline{+ C}$$

<u>Remarque 1.5</u> (i) Dans les exemples, on a donné une infinité de solutions, c'est généralement le cas.

(ii) Si $y \in C^n(I)$ est une solution de

$$E(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

$\forall J \subseteq I$ intervalle ouvert, la restriction de y à J est une solution.

<u>Définition 1.6</u> (Solution maximale & solution générale)

Soit $E(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ une EDO

(i) Si $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert et $y \in C^n(I)$ est une solution, on dit que y est une <u>solution maximale</u> si elle n'est pas la restriction d'une autre solution, i.e. si $J \supseteq I$ est un intervalle ouvert et $\tilde{y} \in C^n(J)$ est une solution tq $\forall x \in I$ $\tilde{y}(x) = y(x)$, alors $I = J$

(ii) La solution générale de l'EDO est l'ensemble de toutes les solutions maximales.

Exemple 1.7 :

Soit l'EDO, $y' + \frac{1}{x^2} = 0$. Par intégration directe, on a que $y(x) = \frac{1}{x} + C$ sont "les solutions"

↳ l'expression seulement manque le domaine!

l'ensemble de définition de y est $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$

$\Rightarrow \forall C$, $y :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \frac{1}{x} + C$

est une solution maximale, et

$\forall C \in \mathbb{R}$, $y :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \frac{1}{x} + C$

est une solution maximale.

$y : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \frac{1}{x} + C$

n'est pas une solution car $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

Pourquoi solution maximale ? si $J \supseteq]0, +\infty[$, $\tilde{y} \in C^1(J)$ solution de $y' + \frac{1}{x^2} = 0$, et $\forall x \in]0, +\infty[$, $\tilde{y}(x) = y(x)$

Si $J \neq]0,+\infty[$, $0 \in J$ $\Rightarrow$ $\tilde{y}$ doit être continue en 0.

$$\Rightarrow \tilde{y}(0) = \lim_{x \to 0^+} \tilde{y}(x) = \lim_{x \to 0^+} y(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} + C$$

$$= +\infty \qquad ↯$$

À la place d'écrire la solution générale sous forme d'ensemble :

$\{ y :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ défini par $y(x) = \frac{1}{x} + C \, : \, C \in \mathbb{R} \}$

$\cup \{ y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ défini par $y(x) = \frac{1}{x} + C \, : \, C \in \mathbb{R} \}$

On la décrit sous forme de liste :

◇ $y :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}$ définie par $y(x) = \frac{1}{x} + C$, $C \in \mathbb{R}$

◇ $y :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ ——————— " ———————

<u>Définition 1.8</u> (Problème de Cauchy, problème aux valeurs initiales, condition(s) initiale(s))

<u>Un problème de Cauchy</u> ou <u>problème aux valeurs initiales</u> est la donnée d'une EDO $E(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ et de n équations $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1$, $\dots$, $y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$ appelées <u>conditions initiales</u> où $t_0, y_0, \dots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ données

On écrit généralement

$$\begin{cases} E(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 & \text{EDO} \\ y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} & \text{conditions initiales} \end{cases}$$

Une <u>solution (maximale) du problème de Cauchy</u> est la donnée d'un intervalle I tq $t_0 \in I$ et $y \in C^n(I)$ une solution maximale de l'EDO tq $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$.